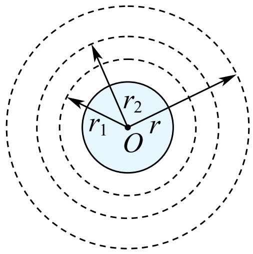
第05章 万有引力与航天

Q1. 克服万有引力做功怎么算？重力势能的表达式是什么？

例1. (2022·福建卷·4)2021年美国“星链”卫星曾近距离接近我国运行在距地390 km近圆轨道上的天宫空间站。为避免发生危险，天宫空间站实施了发动机点火变轨的紧急避碰措施。已知质量为m的物体从距地心r处运动到无穷远处克服地球引力所做的功为$G\frac{Mm}{r}$，式中M为地球质量，G为引力常量；现将空间站的质量记为m_0，变轨前后稳定运行的轨道半径分别记为r_1、r_2，如图所示。空间站紧急避碰过程发动机做的功至少为(　　)



A. $\frac{1}{2}GMm_0\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$　　B. $GMm_0\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$　　C. $\frac{3}{2}GMm_0\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$　　D. $2GMm_0\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$

[解析]空间站紧急避碰的过程可简化为加速、变轨、再加速的三个阶段；空间站从轨道半径r_1变轨到半径r_2的过程，根据动能定理有$W+W_{引力}=\Delta E_k$

依题意可得引力做功$W_{引力}=G\frac{Mm_0}{r_2}-G\frac{Mm_0}{r_1}$

万有引力提供空间站在圆形轨道上做匀速圆周运动的向心力，由牛顿第二定律有$G\frac{Mm_0}{r^2}=m_0\frac{v^2}{r}$

空间站在轨道上运动的动能为$E_k=G\frac{Mm_0}{2r}$

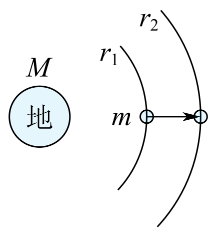
动能的变化量$\Delta E_k=G\frac{Mm_0}{2r_2}-G\frac{Mm_0}{2r_1}$

联立解得$W=\frac{GMm_0}{2}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$，故选A。

[问题]已知质量为m的物体从距地心r处运动到无穷远处克服地球引力所做的功为$G\frac{Mm}{r}$，为什么？

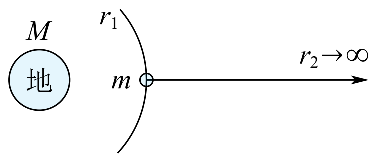
(1)克服万有引力做功的表达式

设地球质量为M，研究空间质量为m的飞行器从距地心为r_1处运动到更远的r_2处克服地球引力做的功，当距地心为x处，引力$F(x)=G\frac{Mm}{x^2}$，沿引力方向移动一微小量$\mathrm{d}x$，做的功$\mathrm{d}W=F(x)\mathrm{d}x$，即$\mathrm{d}W=G\frac{Mm}{x^2}\mathrm{d}x$，$W=GMm\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=GMm\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$。

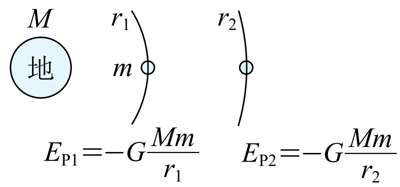


(2)克服万有引力做功的表达式

当r_2为无穷远时，则克服地球引力做的功：$W=G\frac{Mm}{r_1}$。

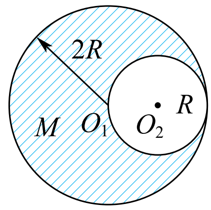


若取无限远的引力势能为零，则距地心 r_1 处的引力势能的简洁表达式为：$E_P=-G\dfrac{Mm}{r_1}$。



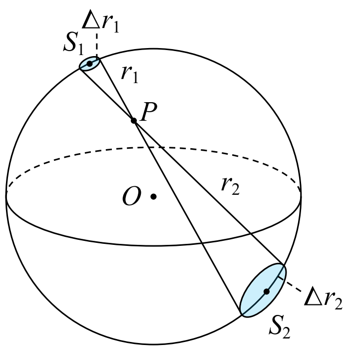
Q2. 为什么均匀球壳内部万有引力为零？

例1. 原球半径 $2R$，质量 M，挖半径 R 球体，在 O_2 处放质量 m 质点，剩余部分对质点的万有引力_____



[解]壳对内部的质点的万有引力的合力为 $F_2=0$，只考虑实心小球体 $m_0=\dfrac{1}{8}M$ 对 m 引力 $F_1=G\dfrac{m_0m}{R^2}=\dfrac{GMm}{8R^2}$，补上小球体对质点引力的合力为0. $F_{合}=\dfrac{GMm}{8R^2}$。

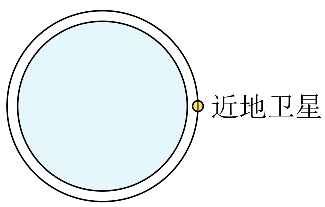
[问题]为什么均匀球壳内部万有引力为零？



球壳表面两块微元对质点 P 的万有引力大小分别为：$F_1=G\dfrac{S_1\sigma m}{r_1^2}$，$F_2=G\dfrac{S_1\sigma m}{r_2^2}$，其中 σ 为面密度，即单位面积的质量。

根据几何关系可知，$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\pi\Delta r_1^2}{\pi\Delta r_2^2}=\dfrac{r_1^2}{r_2^2}$，即 $\dfrac{S_1}{r_1^2}=\dfrac{S_2}{r_2^2}$，从而得到，$F_1=F_2$，大小相等，方向相反。根据对称性，球壳表面所有微元对质点 P 的万有引力都可以相互抵消，从而得到球壳对球壳内的物体没有万有引力作用。

Q3. 第一宇宙速度的证明？



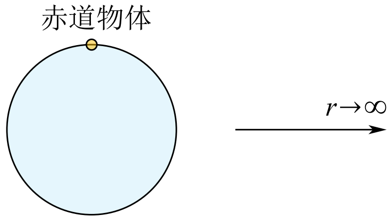
第一宇宙速度 v_1，即近地卫星的环绕速度。由万有引力提供向心力，可得

$G\frac{Mm}{R^2}=m\frac{v_1^2}{R}$，得 $v_1=\sqrt{\frac{GM}{R}}$

将 $R_{地}=6.375\times10^6\text{m}$，地球质量 $M=5.965\times10^{24}\text{kg}$，万有引力常数 $G=6.67259\times10^{-11}\text{m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$ 代入，得 $v_1\approx7.9\text{km/s}$

Q4. 第二宇宙速度的证明？

当飞行器的速度等于或大于 11.2km/s 时，它就会克服地球的引力，永远离开地球。11.2km/s 即为第二宇宙速度。怎样推导第二宇宙速度呢？



推导前，先了解引力势能。若取无限远的引力势能为零，则距地心 r_1 处的引力势能的简洁表达式为：$E_\text{P}=-G\frac{Mm}{r_1}$。

在地球表面，使卫星获得一个速度 v_2，则卫星的总能量为 $E=\frac{1}{2}mv_2^2+(-G\frac{Mm}{R})$，

卫星恰好脱离地球的束缚，即恰好跑到地球的无穷远处，此时动能为零、引力势能为零，所以卫星的总能量为0。整个过程中，只有万有引力做功，则引力势能与动能之和不变，所以

$E=\frac{1}{2}mv_2^2+(-G\frac{Mm}{R})=0$，其中 g 为地球表面的重力加速度，其值为9.8N/kg。地球半径 R 约为6370km，得 $\sqrt{\frac{2GM}{R}}=11.17\text{km/s}\approx11.2\text{km/s}$。

因为第一宇宙速度 $v_1=\sqrt{\frac{GM}{R}}$，所以 $v_2=\sqrt{2}v_1$。

Q5. 第三宇宙速度的证明？

近似计算方法如下，分三部计算：

1. 地球轨道上太阳的逃逸速度，由上述第二宇宙速度公式 $V_2=\sqrt{\frac{2GM}{r}}$，代入 M 为太阳质量，r 为地球绕太阳运动轨道半径，得 $V_2=42.1\text{km/s}$；

2. 地球的公转速度为29.8km/s，如果航天器发射时的速度方向与地球公转速度方向一致，则可以用最小的速度发射，所以有 $V'=(42.1-29.8)\text{km/s}=12.3\text{km/s}$，

V' 为航天器的剩余速度，为航天器克服地球引力的所需的剩余能量；

3. 航天器克服地球引力所消耗的能量 $\frac{1}{2}mv_2^2$ 加上剩余能量 $\frac{1}{2}mV'^2$ 等于航天器的初始动能 $\frac{1}{2}mv_3^2$，即 $\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}mV'^2=\frac{1}{2}mv_3^2$，$v_3=\sqrt{v_2^2+V'^2}=16.7\text{km/s}$，即为第三宇宙速度。